PROBLEMES

Problème 1 :

Soit $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1+e^{2x}}$

1°/ a) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$.

b) Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$ on a : $0 < f(x) \leq \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

2°/ Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$; $(1+e^{2x})f'(x)+(e^{2x}-1)f(x) = -1$

3°/ Pour tout x de $\mathbf{R}$ on pose : $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1+e^t}{1+e^{2t}}dt$

a) Etablir que pour tout réel x on a :

$$F(x) = \int_0^{e^x} \frac{dt}{1+t^2} + Log\left[\frac{\sqrt{2}e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right]$$

b) Soit $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{tgx} \frac{dt}{1+t^2}$

Montrer que $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$; $\varphi(x) = x$

c) En déduire que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{Log3}{2}} f(t)dt = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}Log(\frac{3}{2})$ donner une interprétation géométrique de la valeur de I.

4°/ On donne l'intégrale suivante : $J = \displaystyle\int_0^{\frac{Log3}{2}} \frac{1+e^t}{(1+e^{2t})^2}dt$

a) Montrer qu'il existe deux réels a et b telle que pour tout réel t on a : $\dfrac{1}{1+e^{2t}} = a + \dfrac{be^{2t}}{1+e^{2t}}$, en déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{Log3}{2}} \frac{1+e^t}{(1+e^{2t})^2}dt$

b) Montrer que $\forall t \in \mathbf{R}$; $f'(t) = \dfrac{-1}{1+e^{2t}} - f(t) + \dfrac{2f(t)}{1+e^{2t}}$

trouver alors J.